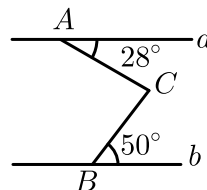


第1讲 相交平行中的几何模型（练习）

一、内吞角模型

1. 如图，直线 $a \parallel b$ ，则 $\angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 78°

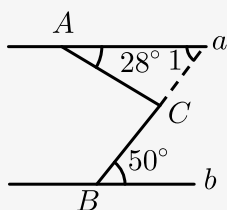
【解析】 方法一：如图，延长 BC 与 a 相交，

$\because a \parallel b$,

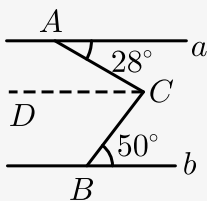
$\therefore \angle 1 = \angle 50^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \angle 1 + 28^\circ = 50^\circ + 28^\circ = 78^\circ$,

故应填 78° 。



方法二：过 C 作 $CD \parallel a$ ，则 $CD \parallel b$ ，

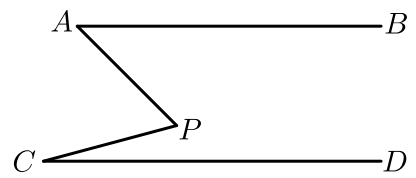


$\therefore \angle DCA = 28^\circ$ ， $\angle DCB = 50^\circ$ （两直线平行，内错角相等）。

$\therefore \angle ACB = \angle DCA + \angle DCB = 78^\circ$ 。

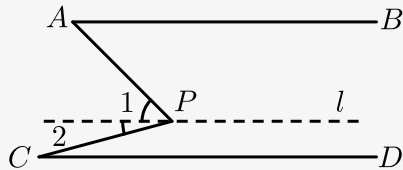
【标注】【知识点】平行线的性质

2. 如图， $AB \parallel CD$ ，且 $\angle BAP = 60^\circ - \alpha$ ， $\angle APC = 45^\circ + \alpha$ ， $\angle PCD = 30^\circ - \alpha$ ，则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。



【答案】15

【解析】过P点作直线l，使得 $l \parallel AB \parallel CD$ ，



$\because l \parallel AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle BAP = \angle 1$ ， $\angle DCP = \angle 2$ ，

$\therefore \angle APC = \angle 1 + \angle 2$ ，

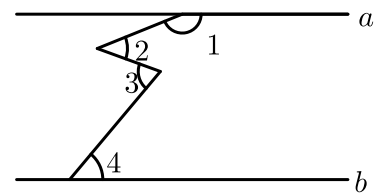
$\therefore \angle APC = \angle BAP + \angle DCP$ ，

$\therefore 45^\circ + \alpha = 60^\circ - \alpha + 30^\circ - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$ ，

解得： $\alpha = 15^\circ$ 。

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

3. 如图， $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 158^\circ$ ， $\angle 2 = 42^\circ$ ， $\angle 4 = 50^\circ$ ，那么 $\angle 3 = ()$ 。



A. 50°

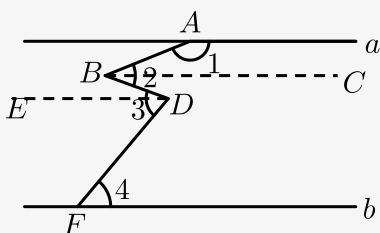
B. 60°

C. 70°

D. 80°

【答案】C

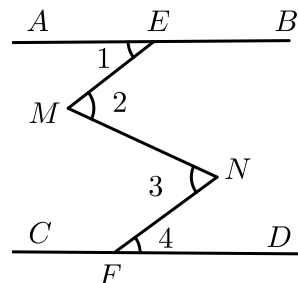
【解析】作 $BC \parallel a$ ， $DE \parallel b$ ，



$\because a // b$,
 $\therefore a // b // BC // DE$,
 $\therefore \angle 1 = 158^\circ$, $\angle 2 = 42^\circ$, $\angle 4 = 50^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$,
 $\therefore \angle CBD = \angle BDE = 42^\circ - 22^\circ = 20^\circ$, $\angle EDF = \angle 4 = 50^\circ$,
 $\therefore \angle 3 = \angle BDE + \angle EDF = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$.
 故答案为 : C .

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

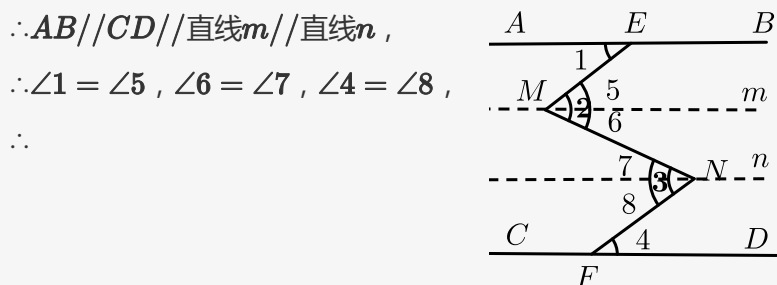
4. 如图 , $AB // CD$, $EMNF$ 是直线 AB 、 CD 间的一条折线 . 若 $\angle 1 = 40^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 70^\circ$, 则 $\angle 4$ 的度数为 () .



- A. 55° B. 50° C. 40° D. 30°

【答案】 B

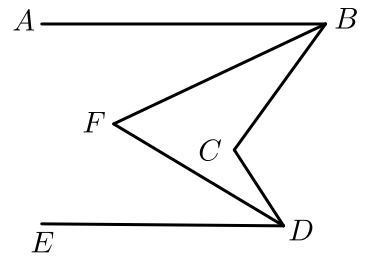
【解析】 过点 M 作直线 $m // AB$, 过点 N 作直线 $n // AB$,



$\therefore AB // CD // \text{直线 } m // \text{直线 } n$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 5$, $\angle 6 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$,
 $\therefore$
 $\angle 6 = \angle NME - \angle 5 = \angle NME - \angle 1 = 20^\circ$,
 $\therefore \angle 8 = \angle MNF - \angle 7 = \angle MNF - \angle 6 = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$,
 $\therefore \angle 4 = \angle 8 = 50^\circ$.

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

5. 已知 : $AB // ED$, BF 、 DF 为 $\angle ABC$ 、 $\angle CDE$ 平分线 .



- (1) 若 $\angle ABC = 44^\circ$, $\angle CDE = 56^\circ$, 求 $\angle F$ 的度数 .
 (2) 求证 : $\angle C = 2\angle F$.

【答案】 (1) 50° .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 过点 F 作 $FM \parallel AB$,

$\because BF$ 、 DF 为 $\angle ABC$ 、 $\angle CDE$ 的平分线 ,

$$\therefore \angle ABF = \frac{1}{2} \angle ABC = 22^\circ, \angle EDF = \frac{1}{2} \angle CDE = 28^\circ,$$

$\because FM \parallel AB, AB \parallel ED$,

$\therefore FM \parallel ED$,

$$\therefore \angle BFM = \angle ABF = 22^\circ, \angle DFM = \angle EDF = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle BFM + \angle DFM = 50^\circ .$$

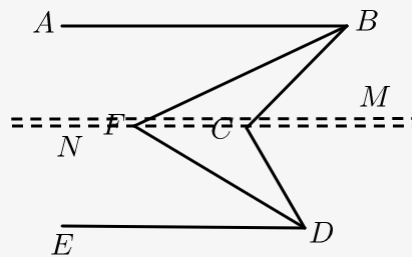
(2) 过点 C 作 $CN \parallel AB$, 同 (1) 可得 ,

$$\angle F = \angle ABF + \angle EDF, \angle C = \angle ABC + \angle CDE,$$

$\because BF$ 、 DF 为 $\angle ABC$ 、 $\angle CDE$ 的平分线

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ABF, \angle CDE = 2\angle EDF,$$

$$\therefore \angle C = 2\angle F .$$

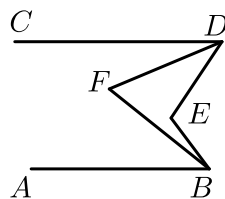


【标注】 【知识点】平行线判定

【知识点】平行线的性质

【能力】推理论证能力

6. 如图 , $AB \parallel CD$, $2\angle ABF = 3\angle FBE$, $2\angle CDF = 3\angle FDE$, 则 $\angle E : \angle F$ 的值为 () .



A. 2 : 1

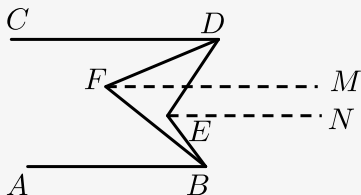
B. 5 : 3

C. 3 : 2

D. 4 : 3

【答案】 B

【解析】 作 $FM \parallel CD$, 作 $EN \parallel CD$,



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore AB \parallel FM, AB \parallel EN,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle DFM, \angle MFB = \angle ABF, \angle DEN = \angle CDE, \angle BEN = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle CDE + \angle ABE, \angle DFB = \angle CDF + \angle ABF,$$

$$\therefore 2\angle ABF = 3\angle FBE, 2\angle CDF = 3\angle FDE,$$

$$\therefore \angle ABF = 1.5\angle FBE, \angle CDF = 1.5\angle FDE,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle CDF + \angle FDE + \angle ABF + \angle FBE$$

$$= 2.5\angle FDE + 2.5\angle FBE,$$

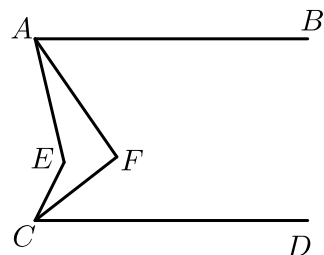
$$\angle DFM = \angle CDF + \angle ABF = 1.5\angle FDE + 1.5\angle FBE,$$

$$\therefore \frac{\angle DEB}{\angle DFM} = \frac{2.5\angle FDE + 2.5\angle FBE}{1.5\angle FDE + 1.5\angle FBE} = \frac{5}{3}.$$

故选 : B .

【标注】 【知识点】 平行线构造-拐点模型

7. 如下图 , 已知 $AB \parallel CD$, $\angle EAF = \frac{1}{4}\angle EAB$, $\angle ECF = \frac{1}{4}\angle ECD$, 则 $\angle AFC$ 是 $\angle AEC$ 的 () .



A. $\frac{2}{3}$

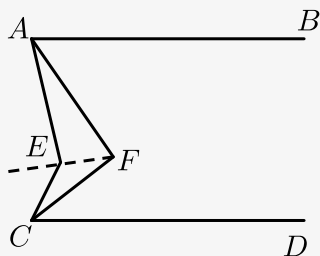
B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{5}{6}$

【答案】B

【解析】如图所示，分别过点E，F做AB和CD的平行线，



$$\begin{aligned}
 \text{易得：} \angle AEC &= \angle EAB + \angle ECD \\
 &= 4\angle EAF + 4\angle ECF \\
 &= 4(\angle EAF + \angle ECF), \\
 \angle AFC &= \angle FAB + \angle FCD \\
 &= 3\angle EAF + 3\angle ECF \\
 &= 3(\angle EAF + \angle ECF), \\
 \text{即有：} \angle AFC &= \frac{3}{4}\angle AEC.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行线的性质

8. 已知：直线 $AB \parallel CD$ ，点E，F分别在直线AB，CD上．

(1) 如图1，写出 $\angle AEM$ ， $\angle EMF$ ， $\angle CFM$ 的数量关系并证明．

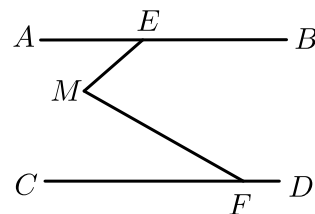


图 1

(2) 如图2， $\angle AEM = 48^\circ$ ，MN平分 $\angle EMF$ ，FH平分 $\angle MFC$ ， $MK \parallel FH$ ，求 $\angle NMK$ 的度数．

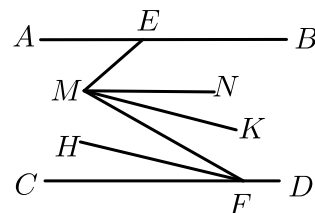
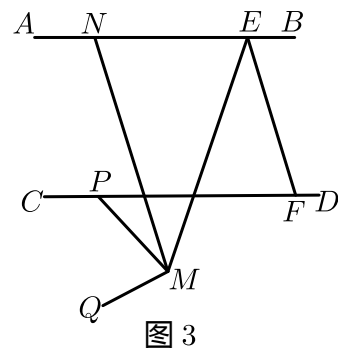


图 2

(3) 如图3，点P为CD上一点， $\angle BEF = n \cdot \angle MEF$ ， $\angle PMQ = n \cdot \angle PME$ ，过点M作 $MN \parallel EF$ 交AB于点N，请直接写出 $\angle PMQ$ ， $\angle BEF$ ， $\angle PMN$ 之间的数量关系（用含n的式子表示）．



【答案】(1) $\angle M = \angle AEM + \angle CFM$.

(2) 24° .

(3) $n\angle PMN = \angle PMQ - \angle BEF$.

【解析】(1) 如图1, 过点M作 $ML \parallel AB$,

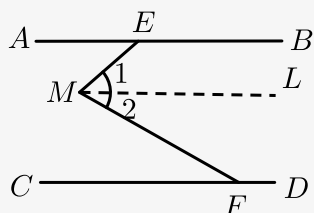


图 1

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore ML \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 1 = \angle AEM, \angle 2 = \angle CFM$,

$\therefore \angle EMF = \angle 1 + \angle 2$,

$\therefore \angle M = \angle AEM + \angle CFM$.

(2) $\because MN$ 平分 $\angle EMF$, FH 平分 $\angle MFC$,

$\therefore \angle NMF = \angle FME, \angle MFH = \angle MFC$,

$\because MK \parallel FH$,

$\therefore \angle KMF = \angle MFH = \angle MFC$,

$\therefore \angle EMF = \angle AEM + \angle MFC$,

$\therefore \angle EMF - \angle MFC = \angle AEM = 48^\circ$,

$\therefore \angle NMK = \angle NMF - \angle KMF$

$= \angle EMF - \angle MFC$

$= \frac{1}{2} \times 48^\circ$

$= 24^\circ$.

(3) $n \cdot \angle PMN = \angle PMQ - \angle BEF$.

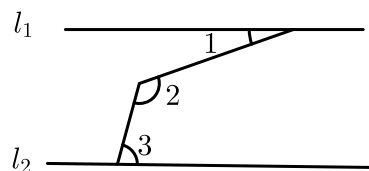
$\because \angle BEF = n \cdot \angle MEF, \angle PMQ = n \cdot \angle PME$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle MEF = \angle BEF, \angle PME = \angle PMQ, \\
&\therefore MN \parallel EF, \\
&\therefore \angle NME = \angle MEF = \angle BEF, \\
&\therefore \angle PMN = \angle PME - \angle NME = \angle PMQ - \angle BEF, \\
&\therefore n \cdot \angle PMN = \angle PMQ - \angle BEF.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行线判定与性质的综合

二、外凸角模型

9. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ， $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle 2 + \angle 3 =$ _____.



【答案】 200°

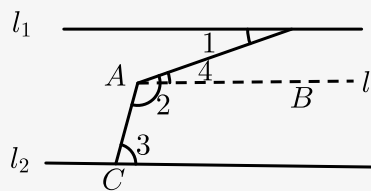
【解析】过 $\angle 2$ 的顶点作 l_2 的平行线 l ，如图所示：

则 $l \parallel l_1 \parallel l_2$ ，

$\therefore \angle 4 = \angle 1 = 20^\circ$ ， $\angle BAC + \angle 3 = 180^\circ$ ，

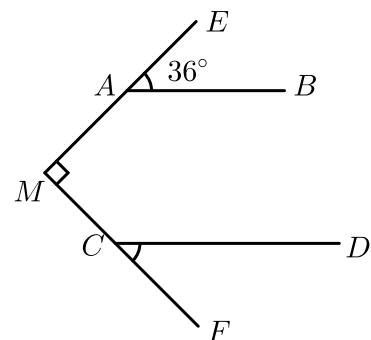
$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ + 20^\circ = 200^\circ$ 。

故答案为： 200° 。



【标注】【知识点】平行线的性质

10. 如图， $AB \parallel CD$ ， $ME \perp MF$ ， $\angle EAB = 36^\circ$ ，则 $\angle FCD =$ () 。



A. 36°

B. 54°

C. 72°

D. 25°

【答案】 B

【解析】 过点M作 $MN \parallel AB$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore AB \parallel CD \parallel MN$,

$\therefore \angle AMN = \angle EAB = 36^\circ$, $\angle FCD = \angle NMC$,

$\because ME \perp MF$,

$\therefore \angle AMC = 90^\circ$,

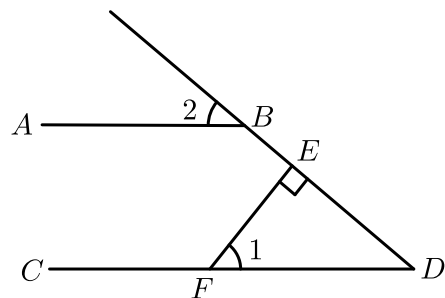
$\therefore \angle NMC = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$,

$\therefore \angle FCD = 54^\circ$.

故选B.

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

11. 如图, $AB \parallel CD$, $FE \perp DB$, 垂足为E, $\angle 1 = 50^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是().



A. 60°

B. 50°

C. 40°

D. 30°

【答案】 C

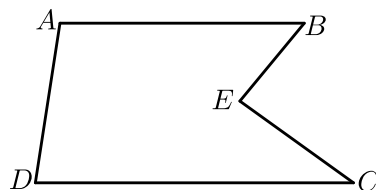
【解析】 $\because FE \perp DB$,

$\therefore \angle DEF = 90^\circ$

$\therefore \angle 1 = 50^\circ$,
 $\therefore \angle D = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.
 $\therefore AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle 2 = \angle D = 40^\circ$.
 故选C .

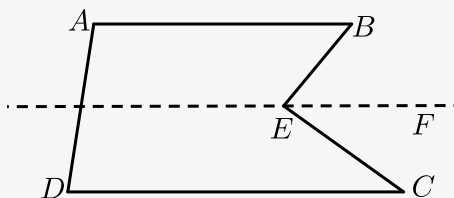
【标注】【知识点】平行线的性质

12. 如图，已知： $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ， $\angle B = 55^\circ$ ， $\angle C = 35^\circ$. 求证： $BE \perp CE$.



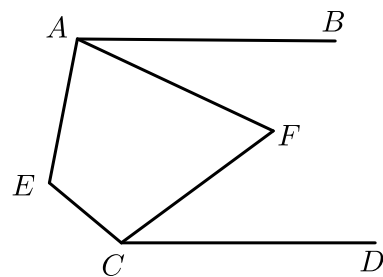
【答案】证明见解析 .

【解析】过E作 $EF \parallel AB$,
 $\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$,
 $\therefore AB \parallel DC$,
 $\therefore EF \parallel DC$.
 $\therefore EF \parallel AB$, $\angle B = 55^\circ$,
 $\therefore \angle BEF = \angle B = 55^\circ$.
 $\therefore EF \parallel DC$, $\angle C = 35^\circ$,
 $\therefore \angle CEF = \angle C = 35^\circ$,
 $\therefore \angle BEC = \angle BEF + \angle CEF = 90^\circ$,
 $\therefore BE \perp CE$.



【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

13. 如图， $AB \parallel CD$ ， $\angle BAF = \frac{1}{3} \angle EAF$ ， $\angle FCD = \frac{1}{3} \angle ECF$ ， $\angle AEC = 120^\circ$ ，则 $\angle AFC$ 的度数为 _____ .



【答案】 60°

【解析】 $\angle AFC = \frac{1}{4}(360^\circ - 120^\circ) = 60^\circ$.

【标注】 【知识点】 平行线判定

【知识点】 平行线的性质

14. 如图1, $AB \parallel CD$, 在 AB 、 CD 内有一条折线 EPF .

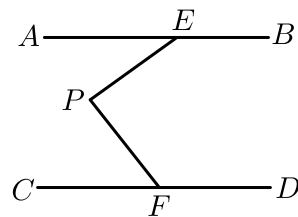


图 1

(1) 证明 : $\angle AEP + \angle CFP = \angle EPF$.

(2) 如图2, 已知 $\angle BEP$ 的平分线与 $\angle DFP$ 的平分线相交于点 Q , 试探索 $\angle EPF$ 与 $\angle EQF$ 之间的关系 .

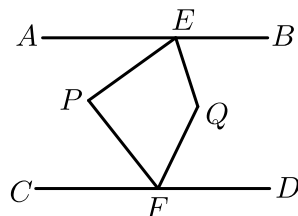


图 2

(3) 如图3, 已知 $\angle BEQ = \frac{1}{3} \angle BEP$, $\angle DFQ = \frac{1}{3} \angle DFP$, 则 $\angle P$ 与 $\angle Q$ 有什么关系, 说明理由 .

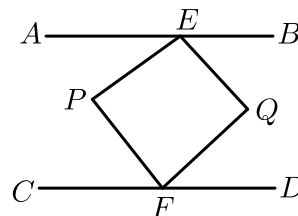


图 3

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $2\angle EQF + \angle EPF = 360^\circ$.

$$(3) \angle P + 3\angle Q = 360^\circ.$$

【解析】(1) 过点P作GH//AB,

$$\because AB//CD,$$

$$\therefore AB//CD//GH,$$

$$\therefore AB//GH,$$

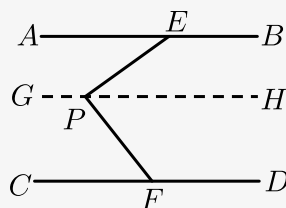
$$\therefore \angle AEP = \angle EPH,$$

$$\therefore GH//CD,$$

$$\therefore \angle CFP = \angle FPH,$$

$$\therefore \angle EPF = \angle EPH + \angle FPH,$$

$$\therefore \angle AEP + \angle CFP = \angle EPF.$$



$$(2) \because \angle AEP + \angle CFP = \angle EPF,$$

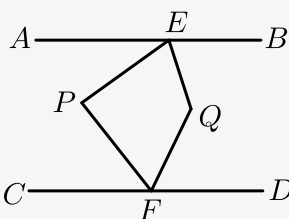
$$\therefore \angle BEQ + \angle DFQ = \angle EQF$$

,

$$\therefore EQ \text{ 平分 } \angle BEP, FQ \text{ 平分 } \angle DFP,$$

$$\text{又} \because \angle BEP + \angle AEP + \angle DFP + \angle CFP = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle EQF + \angle EPF = 360^\circ.$$



$$(3) \because \angle AEP + \angle CFP = \angle P, \angle BEQ + \angle DFQ = \angle Q,$$

$$\angle BEP + \angle AEP + \angle DFP + \angle CFP = 360^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BEQ = \frac{1}{3} \angle BEP, \angle DFQ = \frac{1}{3} \angle DFP,$$

$$\therefore \angle P + 3\angle Q = 360^\circ.$$

【标注】【能力】推理论证能力

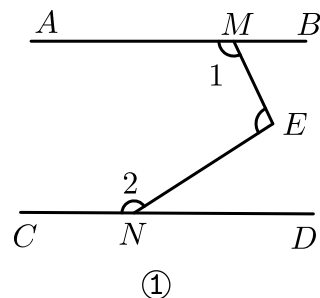
【知识点】平行线的性质

【知识点】角的平分线及等分线的定义

15. 模型与应用：

(1) 【模型】

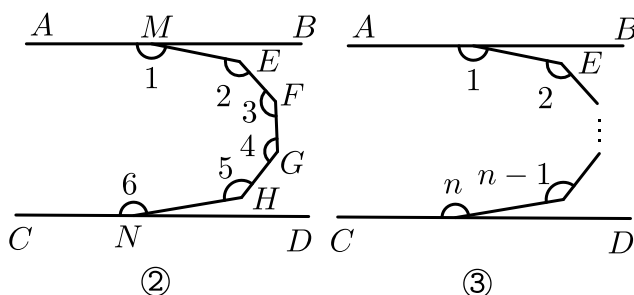
如图①, 已知 $AB//CD$, 求证 $\angle 1 + \angle MEN + \angle 2 = 360^\circ$.



(2) 【应用】

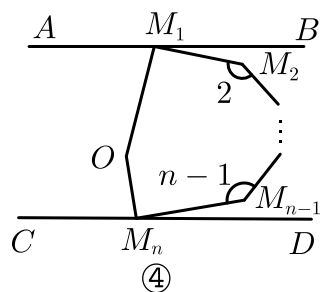
如图②, 已知 $AB \parallel CD$, 则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ 的度数为 _____ .

如图③, 已知 $AB \parallel CD$, 则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \dots + \angle n$ 的度数为 _____ .



(3) 在(2)的基础上, 如图④, 已知 $AB \parallel CD$, $\angle AM_1M_2$ 的角平分线 M_1O 与 $\angle CM_nM_{n-1}$ 的角平分线 M_nO 交于点 O , 若 $\angle M_1OM_n = m^\circ$.

求 $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 \dots + \angle (n-1)$ 的度数. (用含 m, n 的代数式表示)



【答案】(1) 证明见解析.

(2) 900° ; $180^\circ(n-1)$

(3) $180^\circ(n-1) - 2m^\circ$.

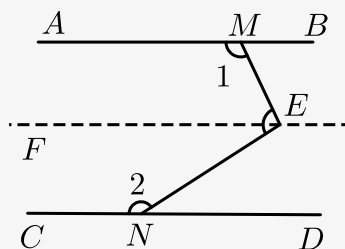
【解析】(1) 过点 E 作 $EF \parallel CD$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore EF \parallel AB$,

$\therefore \angle 1 + \angle MEF = 180^\circ$,

同理 $\angle 2 + \angle NEF = 180^\circ$,



$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle MEN = 360^\circ .$$

$$(2) \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ \times (6 - 1) = 900^\circ ,$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \cdots + \angle n = 180^\circ (n - 1) .$$

(3) 过点O作 $SR \parallel AB$,

$$\therefore AB \parallel CD ,$$

$$\therefore SR \parallel CD ,$$

$$\therefore \angle AM_1O = \angle M_1OR ,$$

$$\text{同理} \angle CM_nO = \angle M_nOR ,$$

$\therefore$

$$\angle AM_1O + \angle CM_nO = \angle M_1OR + \angle M_nOR ,$$

$$\therefore \angle AM_1O + \angle CM_nO = \angle M_1OM_n = m^\circ$$

$$\therefore M_1O \text{ 平分 } \angle AM_1M_2 ,$$

$$\therefore \angle AM_1M_2 = 2\angle AM_1O ,$$

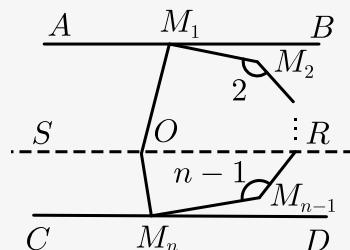
$$\text{同理} \angle CM_nM_{n-1} = 2\angle CM_nO ,$$

$$\therefore \angle AM_1M_2 + \angle CM_nM_{n-1} = 2\angle AM_1O + 2\angle CM_nO ,$$

$$= 2(\angle AM_1O + \angle CM_nO) = 2m^\circ ,$$

$$\therefore \angle AM_1M_2 + \angle 2 + \angle 3 + \cdots + \angle CM_nM_{n-1} = 180^\circ (n - 1) ,$$

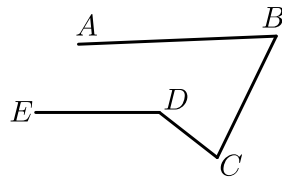
$$\therefore \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \cdots + \angle (n - 1) = 180^\circ (n - 1) - 2m^\circ .$$



【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

三、前仰角模型

16. 如图, $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle CDE = 120^\circ$, 则 $\angle BCD$ 的度数为() .



A. 60°

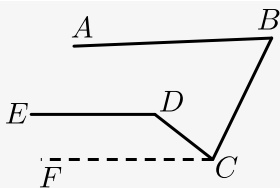
B. 70°

C. 50°

D. 130°

【答案】B

【解析】如图, 过C作 $CF \parallel AB$,



那么 $\angle B + \angle BCF = 180^\circ$,

因为 $\angle B = 50^\circ$,

所以 $\angle BCF = 130^\circ$.

因为 $AB \parallel DE$, $\angle CDE = 120^\circ$,

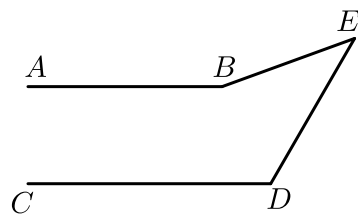
所以 $CF \parallel DE$,

所以 $\angle DCF = 60^\circ$.

所以 $\angle BCD = \angle BCF - \angle DCF = 130^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

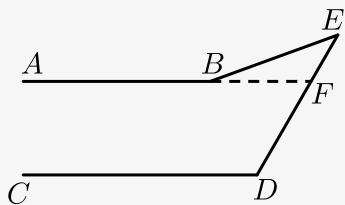
【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

17. 如图 , $AB \parallel CD$, $\angle B = 160^\circ$, $\angle D = 120^\circ$, 则 $\angle E = \underline{\quad\quad}^\circ$.



【答案】 40

【解析】 延长 AB 与 DE 交于点 F ,



$\therefore \angle ABE = 160^\circ$,

$\therefore \angle EBF = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$,

又 $\because AB \parallel CD$ 且 $\angle D = 120^\circ$,

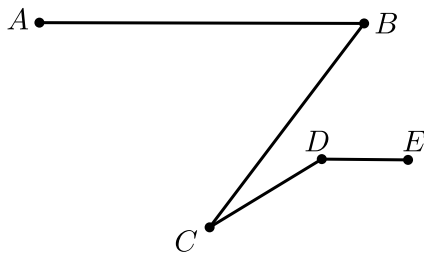
$\therefore \angle BFD = 180^\circ - \angle D = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$\therefore \angle E = \angle BFD - \angle EBF = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$.

故答案为 : 40 .

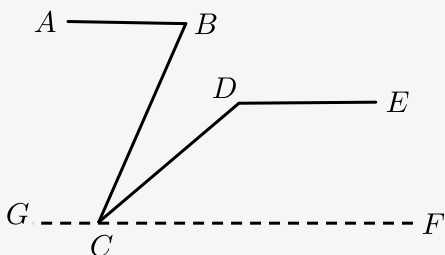
【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

18. 如图, $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle CDE = 150^\circ$, 则 $\angle BCD$ 的度数为 _____ $^\circ$.



【答案】50

【解析】解：过点C作 $FG \parallel AB$,



因为 $FG \parallel AB$, $AB \parallel DE$, (已知)

所以 $FG \parallel DE$, (平行线的传递性)

所以 $\angle B = \angle BCF$, (两直线平行, 内错角相等)

$\angle CDE + \angle DCF = 180^\circ$, (两直线平行, 同旁内角互补)

又因为 $\angle B = 80^\circ$, $\angle CDE = 150^\circ$, (已知)

所以 $\angle BCF = 80^\circ$, (等量代换)

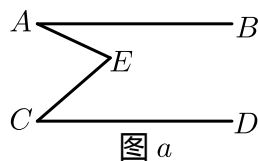
$\angle DCF = 30^\circ$, (等式性质)

所以 $\angle BCD = 50^\circ$.

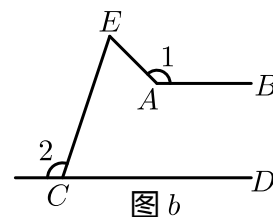
【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

19.

(1) 如图a所示, $AB \parallel CD$, 且点E在射线AB与CD之间, 请说明 $\angle AEC = \angle A + \angle C$ 的理由.



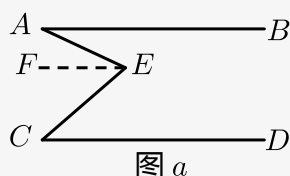
(2) 现在如图b所示, 仍有 $AB \parallel CD$, 但点E在AB与CD的上方. 请尝试探索 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle E$ 三者的数量关系. 并说明理由.



【答案】(1) $\angle AEC = \angle A + \angle C$ ，理由见解析。

(2) $\angle 1 + \angle 2 - \angle E = 180^\circ$ ，理由见解析。

【解析】(1) 过点E作 $EF \parallel AB$ 。



$\therefore \angle A = \angle AEF$ (两直线平行，内错角相等)

$\because AB \parallel CD$ (已知)

$\therefore EF \parallel CD$ (平行的传递性)，

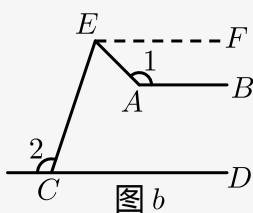
$\therefore \angle FEC = \angle C$ (两直线平行，内错角相等)，

$\therefore \angle AEC = \angle AEF + \angle FEC$ (图上可知)

$\therefore \angle AEC = \angle A + \angle C$ (等量代换)。

(2) $\angle 1 + \angle 2 - \angle E = 180^\circ$ ，

说理如下：过点E作 $EF \parallel AB$



$\therefore \angle AEF + \angle 1 = 180^\circ$ (两直线平行，同旁内角互补)，

$\because AB \parallel CD$ (已知)

$\therefore EF \parallel CD$ (平行的传递性)，

$\therefore \angle FEC = \angle 2$ (两直线平行，内错角相等)，

即 $\angle CEA + \angle AEF = \angle 2$

$\therefore \angle AEF = \angle 2 - \angle CEA$ (等式性质)

$\therefore \angle 2 - \angle CEA + \angle 1 = 180^\circ$ (等量代换)，

即 $\angle 1 + \angle 2 - \angle AEC = 180^\circ$

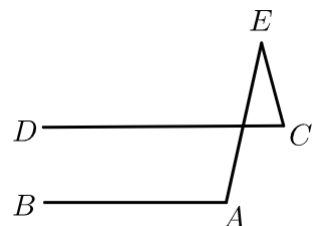
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】平行线构造-拐点模型

【知识点】平行线的性质

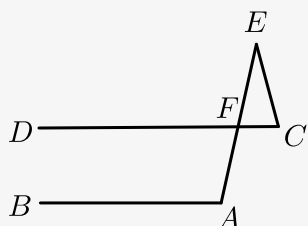
四、后翻角模型

20. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 100^\circ$ ， $\angle C = 75^\circ$ ，则 $\angle E$ 等于_____。



【答案】 25°

【解析】设 DC 、 AE 交于点 F ，



$\because$ 直线 $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 100^\circ$ ，

$\therefore \angle EFD = \angle A = 100^\circ$ ，

$\because \angle EFD$ 是 $\triangle CEF$ 的外角，

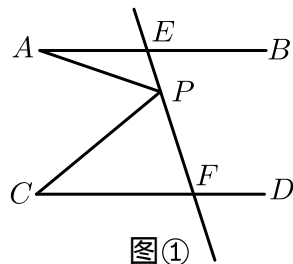
$\therefore \angle E = \angle EFD - \angle C = 100^\circ - 75^\circ = 25^\circ$ 。

【标注】【知识点】三角形的外角定义及性质

【知识点】平行线的性质

21. 已知 $AB \parallel CD$ ，线段 EF 分别与 AB 、 CD 相交于点 E 、 F 。

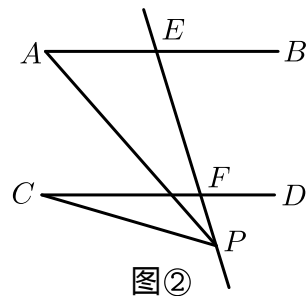
(1) 如图①，当 $\angle A = 20^\circ$ ， $\angle APC = 70^\circ$ 时， $\angle C =$ _____°。



图①

(2) 如图②, 当点 P 在线段 EF 的延长线上运动时, $\angle A$, $\angle C$ 和 $\angle APC$ 的关系为, $\angle APC =$

_____ .

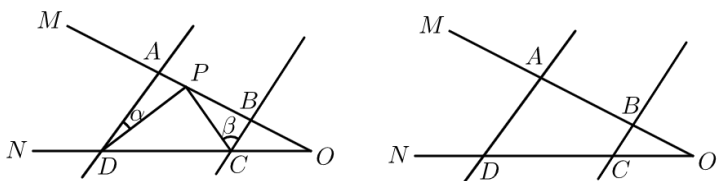


【答案】 (1) 50

(2) $\angle A - \angle C$

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

22. 如图, 已知, 点 P 在射线 OM 上运动, $AD \parallel BC$, 若点 P 在 A , B 两点之间运动时, $\angle ADP = \angle \alpha$, $\angle BCP = \angle \beta$. 求 $\angle CPD$ 与 $\angle \alpha$, $\angle \beta$ 之间有何数量关系? 请说明理由. 若点 P 在 A , B 两点外侧运动时 (点 P 与点 A , B , O 三点不重合), 请你直接写出 $\angle CPD$ 与 $\angle \alpha$, $\angle \beta$ 之间的数量关系.



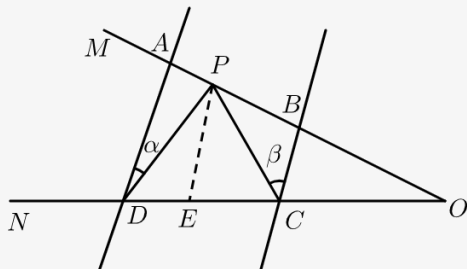
【答案】 $\angle CPD = \angle \alpha + \angle \beta$;

当 P 在 BA 延长线时, $\angle CPD = \angle \beta - \angle \alpha$;

当 P 在 AB 延长线时, $\angle CPD = \angle \alpha - \angle \beta$.

【解析】 (1) $\angle CPD = \angle \alpha + \angle \beta$,

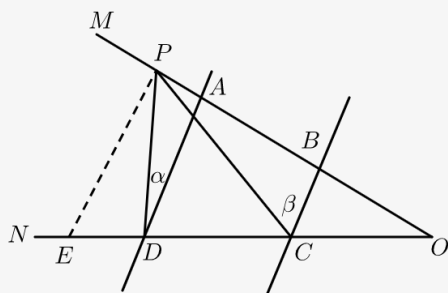
理由是: 如图, 过 P 作 $PE \parallel AD$ 交 CD 于 E ,



$\because AD \parallel BC$,

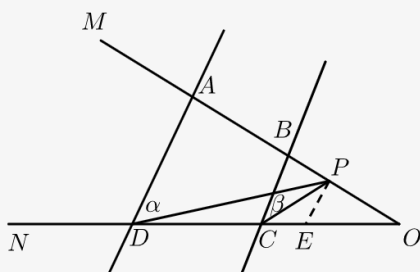
$\therefore AD \parallel PE \parallel BC$,
 $\therefore \angle \alpha = \angle DPE$, $\angle \beta = \angle CPE$,
 $\therefore \angle CPD = \angle DPE + \angle CPE = \angle \alpha + \angle \beta$;

(2) 当 P 在 BA 延长线时 ,



过 P 作 $PE \parallel AD$ 交 CD 于 E ,
 同 (1) 可知 : $\angle \alpha = \angle DPE$, $\angle \beta = \angle CPE$,
 $\therefore \angle CPD = \angle \beta - \angle \alpha$;

当 P 在 AB 延长线时 ,



同 (1) 可知 : $\angle \alpha = \angle DPE$, $\angle \beta = \angle CPE$,
 $\therefore \angle CPD = \angle \alpha - \angle \beta$.

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

23. 回答下列问题 .

(1) 如图1 , $AB \parallel CD$, CF 平分 $\angle DCE$, 若 $\angle DCF = 30^\circ$, $\angle E = 20^\circ$, 求 $\angle ABE$ 的度数 .

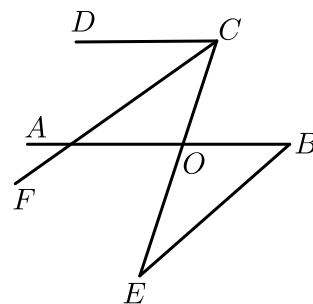


图 1

(2)

如图2，已知 $AB \parallel CD$ ， CF 平分 $\angle DCE$ ， $\angle EBF = 2\angle ABF$ ，若 $\angle F$ 的2倍与 $\angle E$ 的补角的和为 190° ，求 $\angle ABE$ 的度数．

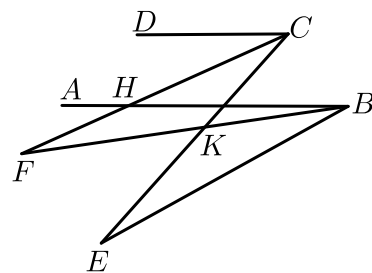


图 2

(3) 如图3，若 P 是(2)中的射线 BE 上一点， G 是 CD 上任一点， $PQ \parallel GN$ ， PQ 平分 $\angle BPG$ ， GM 平分 $\angle DGP$ ，若 $\angle B = 30^\circ$ ，求 $\angle MGN$ 的度数．

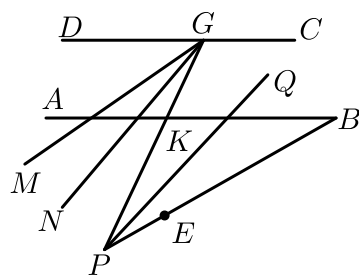


图 3

【答案】 (1) 40° .

(2) 30° .

(3) 15° .

【解析】 (1) 过 E 作 $EM \parallel AB$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore CD \parallel EM \parallel AB$,

$\therefore \angle ABE = \angle BEM$,

$\angle DCE = \angle CEM$,

$\because CF$ 平分 $\angle DCE$,

$\therefore \angle DCE = 2\angle DCF$,

$\because \angle DCF = 30^\circ$,

$\therefore \angle DCE = 60^\circ$,

$\therefore \angle CEM = 60^\circ$,

又 $\because \angle CEB = 20^\circ$,

$\therefore \angle BEM = \angle CEM - \angle CEB = 40^\circ$,

$\therefore \angle ABE = 40^\circ$.

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle PGN = \angle GPQ = x, \\
&\therefore AB \parallel CD, \\
&\therefore PL \parallel AB \parallel CD, \\
&\therefore \angle GPL = \angle DGP = 2y, \\
&\angle BPL = \angle ABP = 30^\circ, \\
&\therefore \angle BPL = \angle GPL - \angle BPG, \\
&\therefore 30^\circ = 2y - 2x, \\
&\therefore y - x = 15^\circ, \\
&\therefore \angle MGN = \angle PGM - \angle PGN = y - x, \\
&\therefore \angle MGN = 15^\circ.
\end{aligned}$$

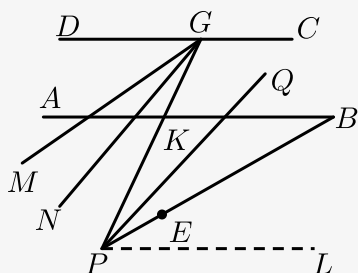


图 3

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

24. 如图1, CE 平分 $\angle ACD$, AE 平分 $\angle BAC$, $\angle EAC + \angle ACE = 90^\circ$.

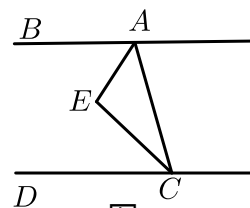


图 1

(1) [尝试发现]

请问 AB 与 CD 有什么位置关系并说明理由.

(2) [探索规律]

如图 2, 当 $\angle E = 90^\circ$ 且 AB 与 CD 的位置关系保持不变, 移动直角顶点 E , 使 $\angle MCE = \angle ECD$, 当直角顶点 E 移动时, 问 $\angle BAE$ 与 $\angle MCD$ 是否存在确定的数量关系? 并说明理由.

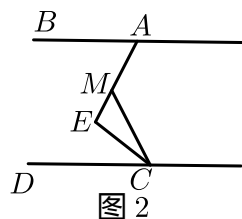


图 2

- (3) 如图3, P 为线段 AC 上一定点, 点 Q 为直线 CD 上一动点且 AB 与 CD 的位置关系保持不变, 当点 Q 在射线 CD 上运动时 (点 C 除外) $\angle CPQ + \angle CQP$ 与 $\angle BAC$ 有何数量关系? 猜想结论并说明理由.

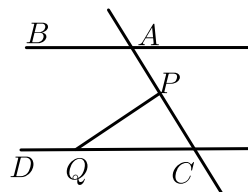


图 3

- (4) [问题解决]

如图4, 直线 $AC \parallel BD$, 连结 AB , 直线 AC 、 BD 及线段 AB 把平面分成①, ②, ③, ④四个部分, 规定: 线上各点不属于任何部分. 当动点 P 落在某个部分时, 连结 PA 、 PB , 构成 $\angle PAC$, $\angle APB$, $\angle PBD$ 三个角. (提示: 有公共端点的两条重合的射线所组成的角是 0°) 当动点 P 在第②、③、④三个部分中其中一种时, 请探究 $\angle PAC$, $\angle APB$, $\angle PBD$ 之间的关系, 并写出动点 P 的具体位置和相应的结论.

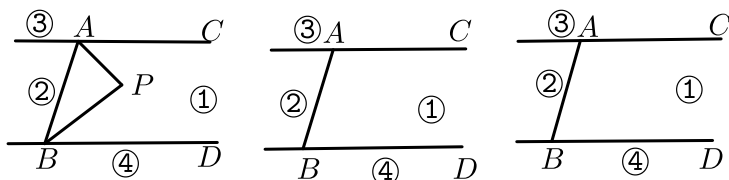


图 4

【答案】 (1) $AB \parallel CD$, 证明见解析.

(2) $\angle BAE + \frac{1}{2} \angle MCD = 90^\circ$; 证明见解析.

(3) $\angle BAC = \angle PQC + \angle QPC$; 证明见解析.

(4) 当 P 在②, 结论是: $\angle APB + \angle PAC + \angle PBD = 360^\circ$;

当 P 在③, 结论是: $\angle APB = \angle PBD - \angle PAC$;

当 P 在④, 结论是: $\angle APB = \angle PAC - \angle PBD$.

【解析】 (1) $\because CE$ 平分 $\angle ACD$, AE 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAC = 2\angle EAC, \angle ACD = 2\angle ACE,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ACD = 180^\circ,$$

$$\therefore AB // CD .$$

$$(2) \angle BAE + \frac{1}{2} \angle MCD = 90^\circ ,$$

过E作EF//AB ,

$$\because AB // CD ,$$

$$\therefore EF // AB // CD ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEF , \angle FEC = \angle DCE ,$$

$$\because \angle E = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle ECD = 90^\circ ,$$

$$\because \angle MCE = \angle ECD ,$$

$$\therefore \angle BAE + \frac{1}{2} \angle MCD = 90^\circ .$$

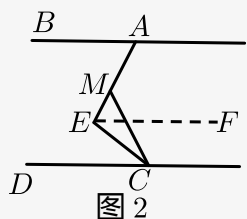


图 2

$$(3) \because AB // CD ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ACD = 180^\circ ,$$

$$\because \angle QPC + \angle PQC + \angle PCQ = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle PQC + \angle QPC .$$

$$(4) \text{ 当 } P \text{ 在 } \textcircled{2} ,$$

$$\text{结论是: } \angle APB + \angle PAC + \angle PBD = 360^\circ ,$$

理由是: 过P作PM//AC ,

$$\because AC // BD ,$$

$$\therefore AC // PM // BD ,$$

$$\therefore \angle PAC + \angle APM = 180^\circ , \angle PBD + \angle BPM = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle APB + \angle PAC + \angle PBD = 360^\circ , \text{ 而不能推出 } \angle APB = \angle PAC + \angle PBD$$

;

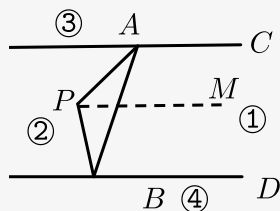


图 3

当P在③, 且P在直线AB的右边时, 如图4,

$$\text{结论是: } \angle APB = \angle PBD - \angle PAC ,$$

理由是：延长 AP 交 BD 于 M ，
 $\because AC \parallel BD$ ，
 $\therefore \angle PAC = \angle AMB$ ，
 $\therefore \angle APB = \angle PBD - \angle AMB$ ，
 $\therefore \angle APB = \angle PBD - \angle PAC$ ；

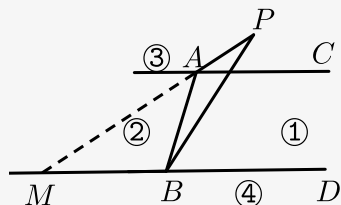


图 4

当 P 在④，且 P 在直线 AB 的右边时，如图5，
 结论是： $\angle APB = \angle PAC - \angle PBD$ ，
 理由是：

$\because AC \parallel BD$ ，
 $\therefore \angle PAC = \angle PMD$ ，
 $\therefore \angle APB = \angle PMD - \angle PBD$ ，
 $\therefore \angle APB = \angle PAC - \angle PBD$ 。

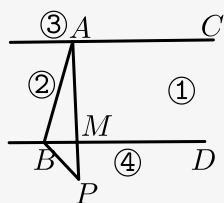


图 5

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型